Huvudansökan, kandidatprogrammet i matematiska vetenskaper

Urvalsprov 7.5.2018 kl. 10.00–13.00

Skriv ditt namn och dina personuppgifter med tryckbokstäver.
Skriv ditt namn med latinska bokstäver (abcd...), inte till exempel med kyrilliska bokstäver (абгд...).
Om du inte har en finländsk personbeteckning, skriver du istället din födelsetid.
Skriv dina personuppgifter på alla provpapper

Efternamn	
Förnamn (alla)	
Personbeteckning	
E-postadress	
Telefon	

Kontrollera med hjälp av sidnumren att du har fått alla sidor.

Skriv din namnteckning i fältet nedan för att visa att du har kontrollerat ovan nämnda saker.

Namnteckning	

Om du vill att dina provsvar bedöms, lämna det nedanstående fältet tomt.
Om du inte vill att dina provsvar bedöms, skriv följande text i fältet nedan: "*Jag vill inte att mina provsvar bedöms*". I detta fall får du noll poäng i provet.

Att avstå från bedömning	

Namn: ________________________________

Personbeteckning: ______________________

WC

Läs noggrant igenom alla anvisningar

- Kontrollera att ditt provkompendium utöver titelbladet och anvisningarna (sida 1–4) innehåller följande sidor:
  - provfrågor och svarsfält (sida 5–9)
  - ett konceptpapper för egna anteckningar.
- Frågor besvaras på pappret med frågor och svarsfält.
- **Kontrollera att du har skrivit ditt namn och din personbeteckning på alla svarsblanketter.**
- Skriv dina provsvar
  - på finska eller svenska. Svar som har skrivits på andra språk bedöms inte.
  - för uppgifter på provkompendiet. Skriv varje svar i frågans svarsfält. Anteckningar som skrivits utanför svarsfältet beaktas inte i bedömningen.
  - med blyertspenna och med tydlig handstil. Otydliga anteckningar bedöms enligt det alternativet som ger minst poäng.
- Skriv inte alternativa svar. Om du skriver alternativa svar, beaktas endast det svar som ger minst poäng.
- Du kan planera dina svar och skriva egna anteckningar på konceptpappret. Anteckningarna på konceptpappret beaktas inte i bedömningen. Du har fått ett konceptpappersark. Du kan få mera konceptpapper av övervakaren.
- Placera ditt provmaterial så att deltagare som sitter nära dig inte kan se dina svar och anteckningar.

Poäng

Urvalsprovet poängsätts på skalan 0–50. Om det ges poäng separat per uppgift, anges detta vid uppgiften.

Litteraturen till urvalsprovet

Uppgifterna i urvalsprovet baserar sig på gymnasiets långa lärokurs i matematik (9 kurser, enligt Grunderna för gymnasiets läroplan 2015).

Om du vill påkalla övervakarens uppmärksamhet

Om du vill påkalla övervakarens uppmärksamhet, ska du höja armen. Övervakaren kommer då fram till dig. Säg ditt ärende till övervakaren med låg röst.

Om du vill gå på toaletten

Du kan besöka toaletten ledsagad av en övervakare. Övervakarna följer en provdeltagare åt gången till toaletten.

De flesta provsalar har endast sådana toaletter i närheten som följer den traditionella könsindelningen i dam- och herrtoaletter. Därför måste den övervakare som följer dig vara en man om du vill besöka herrtoaletten och en kvinna om du vill besöka damtoaletten.

Gör så här om du vill besöka toaletten:

1. Kontrollera att det finns minst två övervakare i salen och att minst en är en person som kan följa dig till toaletten. Om dessa kriterier inte uppfylls, vänta tills situationen har ändrats.

2. Ta fram sidan 2 med texten WC med stor font och håll upp pappret så att övervakaren kan se texten och kommer fram till dig. Vänta tålmodigt. Övervakaren kan kanske inte följa dig till toaletten genast. Övervakaren kan inte heller nödvändigtvis följa provdeltagarna till toaletten i den ordning de anmäler sitt behov.

3. När övervakaren ger dig ett tecken, samla ihop dina provpapper och lägg dem innanför konceptpappret, och följ sedan övervakaren till toaletten.

När du vill lämna in ditt prov

När du vill lämna in provet, lägg in dina provpapper innanför konceptpappret i samma ordning som du fick dem.

När du går för att lämna in provet, ta med alla dina saker från din plats så att du inte behöver gå tillbaka för att hämta dem.

Lämna in alla provpapper, också konceptpappret, till övervakaren i salens främre del.

Lämna in alla papper, även om du har lämnat vissa eller alla uppgifter obesvarade. Bevisa din identitet när du lämnar in provpappren. Kom ihåg att skriva din namnteckning på provkompendiets titelblad. I samband med att du lämnar in dina provpapper antecknar övervakaren att du har deltagit i och lämnat in provet. Övervakaren kan ge dig ett separat intyg över att du deltagit i provet om du behöver det.

Uppgift 1

Lös följande ekvationer och olikheter.

(a) $-(x+1)(-3+2x) \leq 0$, (2 poäng)
(b) $2e^{x} = e^{2x}$, (2 poäng)
(c) $-|x-3| > -|x+2|$, (2 poäng)
(d) $\sin(3x+\pi) = -1$, (2 poäng)
(e) $2(x+2)^{2/3} \leq 8$. (2 poäng)

Uppgift 2

En hörnpunkt till en rektangel är i origo och två sidor ligger på de positiva koordinataxlarna. En av hörnpunkterna finns på linjen $y = -3x + 120$.

(a) Bestäm den största möjliga arean till rektangeln. (5 poäng)
(b) I vilka punkter befinner sig hörnpunkterna till de rektanglar som satisfierar villkorena och vars area är hälften av arean till den största möjliga rektangeln? (5 poäng)

Uppgift 3

Man kastar fem vanliga tärningar, som har ögontalen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

(a) Vilken är sannolikheten att alla tärningar har samma ögontal? (4 poäng)
(b) Vilken är sannolikheten att alla tärningar har olika ögontal? (4 poäng)
(c) Vilken är sannolikheten att åtminstone två tärningar har samma ögontal? (2 poäng)

Uppgift 4

Ett plan löper genom punkten $(0,1,-2)$ och dess normalvektor är 4**i** + 5**j** – 6**k**.

(a) I vilken punkt skär planet y-axeln? (5 poäng)
(b) Beräkna planets avstånd från origo. (5 poäng)

Uppgift 5

Medelvärdessatsen. Om den kontinuerliga funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ är deriverbar i det öppna intervallet $]a, b[$, så finns det en sådan punkt $z \in]a, b[$ att $f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(a) Sök den punkt $z \in]-1{,}2[$ som anges i medelvärdessatsen för funktionen $f\colon [-1{,}2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. (5 poäng)

(b) Finns det för funktionen $g\colon [-1{,}2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, en punkt $z \in]-1{,}2[$ för vilken $g'(z) = \frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}$? Varför är det ingen motsägelse mellan din observation och medelvärdessatsen? (5 poäng)

Helsingin yliopisto
Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma
Valintakoe 7.5.2018 – Ratkaisut ja pisteytys

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.
   (a) $-(x+1)(-3+2x) \leqslant 0$, (2 p.)
   (b) $2e^x = e^{2x}$, (2 p.)
   (c) $-|x-3| > -|x+2|$, (2 p.)
   (d) $\sin(3x+\pi) = -1$, (2 p.)
   (e) $2(x+2)^{2/3} \leqslant 8$. (2 p.)

Ratkaisu.

(a) Yhtälön $-(x+1)(-3+2x) = 0$ ratkaisut ovat $x = -1$ ja $x = \frac{3}{2}$ (+1 p.). Koska $-(x+1)(-3+2x) = -2x^2 + x + 3$ on alaspäin aukeava paraabeli, niin epäyhtälön $-(x+1)(-3+2x) \leqslant 0$ ratkaisu on $x \leqslant -1$ tai $x \geqslant \frac{3}{2}$ (+1 p.).

(b) $2e^x = e^{2x} \overset{e^x>0}{\iff} 2 = \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x$ (+1 p.) $\iff x = \ln 2$ (+1 p.).

(c) $-|x-3| > -|x+2| \iff |x-3| < |x+2| \iff (x-3)^2 < (x+2)^2 \iff x^2-6x+9 < x^2+4x+4$ (+1 p.) $\iff -6x+9 < 4x+4 \iff 10x > 5 \iff x > \frac{1}{2}$ (+1 p.).

(d) $\sin(3x+\pi) = -1 \iff 3x + \pi = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) (+1 p.) $\iff 3x = -\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \iff x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ (+1 p.). Yhtä hyvin ratkaisuksi kelpaa $\sin(3x+\pi) = -1 \iff 3x+\pi = -\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) (+1 p.) $\iff 3x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \iff x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$ (+1 p.).

(e) Epäyhtälö on määritelty, kun $x + 2 > 0$ eli kun $x > -2$. $2(x+2)^{2/3} \leqslant 8 \iff (x+2)^{2/3} \leqslant 4 \iff \left((x+2)^{2/3}\right)^{3/2} \leqslant 4^{3/2} \iff x + 2 \leqslant (2^2)^{3/2} = 2^3 = 8 \iff x \leqslant 6$ (+1 p.). Näin ollen epäyhtälö toteutuu, kun $-2 < x \leqslant 6$ (+1 p.).

2. Suorakulmion kärki on origossa ja kaksi sivua ovat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Yksi kärjistä on suoralla $y = -3x + 120$.
   (a) Määritä suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala. (5 p.)
   (b) Missä pisteissä sijaitsevat sellaisten ehdot täyttävien suorakulmioiden kärjet, joiden pinta-ala on puolet suurimman mahdollisen suorakulmion pinta-alasta? (5 p.)

Ratkaisu.

(a) Merkitään suorakulmion suoralla $y = -3x + 120$ olevaa kärkeä (x, y), jolloin $x, y > 0$. Tällöin suorakulmion pinta-ala on

$$A(x) = xy = x(-3x + 120) = -3x^2 + 120 \quad (+1 \text{ p.}).$$

Koska A:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli (+1 p.) ja

$$A'(x) = -6x + 120 = 0 \quad (+1 \text{ p.}) \iff x = \frac{120}{6} = 20 \quad (+1 \text{ p.}),$$

niin suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala on

$$A(20) = -3 \cdot 20^2 + 120 \cdot 20 = -1200 + 2400 = 1200 \quad (+1 \text{ p.}).$$

(b) Ehdot täyttävät suorakulmiot toteuttavat yhtälön

$$B(x) = xy = x(-3x + 120) = -3x^2 + 120 = \frac{A(20)}{2} = \frac{1200}{2} = 600 \quad (+1 \text{ p.})$$

$$\iff 3x^2 - 120x + 600 = 0$$

$$\iff x^2 - 40x + 200 = 0 \quad (+1 \text{ p.})$$

$$\iff x = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 1 \cdot 200}}{2} = 20 \pm \frac{\sqrt{800}}{2} = 20 \pm 10\sqrt{2} \quad (+1 \text{ p.}).$$

Näitä vastaavat y-akselin pisteet ovat

$$y = -3x + 120 = -3(20 \pm 10\sqrt{2}) = -60 \mp 30\sqrt{2} + 120 = 60 \mp 30\sqrt{2},$$

joten kysytyt pisteet ovat $(20 + 10\sqrt{2}, 60 - 30\sqrt{2})$ (+1 p.), jolloin suorakulmion muut kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(20 + 10\sqrt{2}, 0)$ ja $(0, 60 - 30\sqrt{2})$, sekä $(20 - 10\sqrt{2}, 60+30\sqrt{2})$ (+1 p.), jolloin suorakulmion muut kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(20 - 10\sqrt{2}, 0)$ ja $(0, 60 + 30\sqrt{2})$.

3. Heitetään viisi tavallista noppaa, joissa on silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   (a) Mikä on todennäköisyys, että kaikkiin noppiin saadaan sama silmäluku? (4 p.)
   (b) Mikä on todennäköisyys, että kaikkiin noppiin saadaan eri silmäluku? (4 p.)
   (c) Mikä on todennäköisyys, että vähintään kahdessa nopassa on sama silmäluku? (2 p.)

Ratkaisu.

(a) $P(\text{"kaikissa sama"}) = 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$ (+2+1+1 p.).

(b) $P(\text{"kaikissa eri"}) = \frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5}{54}$ (+2+1+1 p.).

(c) $P(\text{"vähintään kahdessa sama"}) = 1 - P(\text{"kaikissa eri"}) = 1 - \frac{5}{54} = \frac{49}{54}$ (+1+1 p.).

4. Taso kulkee pisteen $(0, 1, -2)$ kautta ja sen normaalivektori on $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.
   (a) Missä pisteessä taso leikkaa y-akselin? (5 p.)
   (b) Laske tason etäisyys origosta. (5 p.)

Ratkaisu.

(a) Tason yhtälö on

$$4 \cdot (x - 0) + 5 \cdot (y - 1) - 6 \cdot (z - (-2)) = 0 \quad (+1 \text{ p.})$$

$$\iff 4x + 5y - 6z - 17 = 0 \quad (+1 \text{ p.}).$$

Taso leikkaa y-akselin pisteessä, jossa $x = 0$ ja $z = 0$, jolloin

$$4 \cdot 0 + 5y - 6 \cdot 0 - 17 = 0 \quad (+1 \text{ p.}) \iff 5y = 17 \iff y = \frac{17}{5} \quad (+1 \text{ p.}).$$

Näin ollen taso leikkaa y-akselin pisteessä $(0, \frac{17}{5}, 0)$ (+1 p.).

(b) Origon $(0, 0, 0)$ etäisyys tasosta $4x + 5y - 6z - 17 = 0$ on

$$\frac{|4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 6 \cdot 0 - 17|}{\sqrt{4^2 + 5^2 + (-6)^2}} \quad (+1+1+1 \text{ p.})$$

$$= \frac{17}{\sqrt{16 + 25 + 36}} = \frac{17}{\sqrt{77}} \quad (+1+1 \text{ p.}).$$

5. **Väliarvolause.** Jos jatkuva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva avoimella välillä $]a,b[$, niin on olemassa sellainen piste $z \in]a,b[$, että $f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
   (a) Etsi väliarvolauseessa esiintyvä piste $z \in]-1,2[$ funktiolle $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. (5 p.)
   (b) Löytyykö funktiolle $g\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, pistettä $z \in]-1,2[$, jolle $g'(z) = \frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}$? Miksi havaintosi ei ole ristiriidassa väliarvolauseen kanssa? (5 p.)

Ratkaisu.

(a) Koska $f'(x) = 2x$ (+1 p.), niin saadaan

$$2z = f'(z) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2^2-(-1)^2}{3} = \frac{4-1}{3} = 1 \quad (+1+1+1 \text{ p.}),$$

joten $z = \dfrac{1}{2}$ (+1 p.).

(b) Nyt

$$g'(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 2, \end{cases} \qquad (+1 \text{ p.})$$

ja g ei ole derivoituva origossa (+1 p.), mutta

$$\frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \quad (+1 \text{ p.}),$$

joten ei ole olemassa sellaista pistettä $z \in]-1,2[$, jolle $g'(z) = \frac{g(2)-g(-1)}{2-(-1)}$ (+1 p.). Havainto ei ole ristiriidassa väliarvolauseen kanssa, koska siinä vaatimuksena on funktion derivoituvuus koko avoimella välillä $]a,b[$, mutta g ei ole derivoituva pisteessä $0 \in]-1,2[$ (+1 p.).